Roteiro de viagem: de Ricatti até Linear, com escala em Bernoulli

Abrantes Araújo Silva Filho

2020-06-01

A **equação de Ricatti** é uma equação diferencial não-linear com a forma geral dada por:

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{1}$$

Ela é uma equação diferencial bem específica, com o que parece ser uma equação quadrática de y do lado direito.

Para resolver a equação de Ricatti nos baseamos em uma **solução particular conhecida** chamada de y_1. Note que y_1 não é a solução geral para e equação de Ricatti, é apenas uma solução em particular que sabemos previamente que funciona. A partir dessa solução particular conhecida y_1 nós podemos encontrar a solução geral y para a equação de Ricatti com a seguinte idéia: se y_1 é uma solução particular para Ricatti, então podemos achar a solução geral y da seguinte forma:

$$y = y_1 + u, \tag{2}$$

ou seja, a solução paticular y_1 "fará parte" da solução geral, acrescida de um termo u. Na Equação 2 sabemos de antemão o valor da solução particular, mas ainda não sabemos o que u será. Portanto, para encontrar a solução geral para Ricatti, precisamos descobrir o valor de u. Como isso pode ser feito?

Usando $y = y_1 + u$ como o formato da solução geral, temos que:

$$\begin{aligned} y &= y_1 + u \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} \end{aligned} \tag{3}$$

Agora vamos utilizar os valores de dy/dx e de y ilustrados na Equação 3 e substituir na equação original de Ricatti:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \\ \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} &= P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Expandindo os termos teremos então:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x)y_1^2 + 2R(x)y_1u + R(x)u^2 \tag{5}$$

Reordenando os termos da equação temos então:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = \left[P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2\right] + [Q(x)u + 2R(x)y_1u] + R(x)u^2 \tag{6}$$

Preste atenção na Equação 6: note que o termo $[P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2]$ é, na verdade, uma outra equação de Ricatti que pode ser reescrita como dy_1/dx! Note também que podemos simplificar o termo $[Q(x)u + 2R(x)y_1u]$ colocando o u em evidência. Fazendo isso teremos:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + [Q(x) + 2R(x)y_1]\, u + R(x)u^2 \tag{7}$$

Após simplificar dy_1/dx em ambos os lados chegamos em:

$$\begin{aligned} \cancel{\frac{dy_1}{dx}} + \frac{du}{dx} &= \cancel{\frac{dy_1}{dx}} + [Q(x) + 2R(x)y_1]\, u + R(x)u^2 \\ \frac{du}{dx} &= [Q(x) + 2R(x)y_1]\, u + R(x)u^2 \end{aligned} \tag{8}$$

Subtraindo $[Q(x) + 2R(x)y_1]\, u$ em ambos os lados chegaremos em:

$$\frac{du}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]\, u = R(x)u^2 \tag{9}$$

E o que é a Equação 9? Se você reparar bem verá que é uma **equação de Bernoulli** na forma geral:

$$\frac{du}{dx} + P(x)u = f(x)u^n \tag{10}$$

Saímos de uma equação de Ricatti e chegamos em uma equação de Bernoulli! Ainda não encontramos a solução para a equação de Ricatti, chegamos apenas em nossa “escala” até o destino final, uma equação linear. Mas agora devemos resolver a equação de Bernoulli.

Para resolver a equação de Bernoulli, a chave é usar a substituição:

$$w = u^{1-n} \tag{11}$$

Como, na equação 9, $n = 2$, w será:

$$\begin{aligned} w &= u^{1-n} = u^{1-2} \\ w &= u^{-1} \end{aligned} \tag{12}$$

Diferenciando implicitamente teremos:

$$\begin{aligned} w &= u^{-1} \\ \frac{dw}{dx} &= \frac{d}{dx}u^{-1}\frac{du}{dx} \\ \frac{dw}{dx} &= -u^{-2}\frac{du}{dx} \\ \frac{du}{dx} &= -u^{2}\frac{dw}{dx} \end{aligned} \tag{13}$$

Agora substituímos du/dx na equação 9:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]\,u &= R(x)u^2 \\ -u^2\frac{dw}{dx} - [Q(x) + 2R(x)y_1]\,u &= R(x)u^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Podemos então dividir a equação por $-u^2$:

$$\begin{aligned} \frac{-u^2\dfrac{dw}{dx}}{-u^2} - \frac{[Q(x) + 2R(x)y_1]\,u}{-u^2} &= \frac{R(x)u^2}{-u^2} \\ \frac{dw}{dx} + [Q(x) + 2R(x)y_1]\,u^{-1} &= -R(x) \end{aligned} \tag{15}$$

Considerando que $u^{-1} = w$, podemos substituir u^{-1} por w na equação e chegar em:

$$\frac{dw}{dx} + [Q(x) + 2R(x)y_1]\,w = -R(x) \tag{16}$$

Note que a equação 16 é uma **equação Linear** com a forma geral:

$$\frac{dw}{dx} + P(x)w = f(x) \tag{17}$$

Assim, realizando substituições sucessivas relativamente simples[1], conseguimos che-

[1] Mas não óbvias!

gar em uma equação linear saindo de Ricatti, e passando por Bernoulli. Para encontrar a solução geral para a equação de Ricatti basta agora resolver a equação linear final.

Em resumo, saímos da equação de Ricatti:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2} \tag{18}$$

passamos por uma equação de Bernoulli:

$$\boxed{\frac{du}{dx} - \left[Q(x) + 2R(x)y_1\right] u = R(x)u^2} \tag{19}$$

e chegamos em uma equação linear:

$$\boxed{\frac{dw}{dx} + \left[Q(x) + 2R(x)y_1\right] w = -R(x)} \tag{20}$$